STOCHASTICS AND STATISTICS IN STUDY OF EDUCATION FOR ELEMENTARY SCHOOL TEACHERS

[STOCHASTIKA A STATISTIKA VE STUDIU UCITELSTVI PRO 1. STUPEN ZAKLADNI SKOLY]

Jan Melichar

doi: 10.18355/PG.2016.5.1.14-20

Abstract

Author presents way of education of stochastics and statistics during study of elementary school teaching. Students come out from real impulses, they proceed from informal processes to formal processes that are connected with reality up to formal mathematics. Students are solving problem situations starting from games focused on statistics and probability up to use of statistics and probability in connection with the theory of heredity. Students are led to inquiry-based learning.

Key words

stochastics, statistics, games focused on statistics and probability, heredity, genotype, phenotype, inquiry-based learning

Abstrakt

Autor ukazuje způsob výuky stochastiky a statistiky ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy. Studenti vycházejí z reálných podnětů, postupují od neformálních postupů spjatých s realitou až k tomu, co je přijatelné jako formální matematika. Studentům jsou předkládány problémové situace, které řeší. Od her, kde je využita pravděpodobnost a statistika přecházejí studenti nenásilně k využití pravděpodobnosti a statistiky v teorii dědičnosti. Studenti jsou vedeni k badatelsky orientované výuce.

Klíčová slova

stochastika, statistika, hry s využitím pravděpodobnosti, dědičnost, genotyp, fenotyp, badatelsky orientovaná výuka

Úvod

Na Pedagogické fakultě Univerzity Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem ve studiu učitelství pro 1. stupeň základní školy věnuji pozornost v předmětu Didaktika matematiky stochastice a statistice na základě podnětů, které jsem získal při spolupráci s Pedagogickou univerzitou v polském Krakově jmenovitě s Prof. Dr.hab Adamem Plockým. Při výuce vycházíme z realistického přístupu k vyučování matematice, kdy studenti vycházejí z reálných podnětů, postupují od neformálních postupů spjatých s realitou až k tomu, co je přijatelné jako formální matematika. Studentům jsou předkládány problémové situace, které řeší.

Výuka statistiky je v úzké souvislosti se stochastikou, t. j. naukou o počtu pravděpodobnosti (probabilitou). Souvislost mezi stochastikou a matematickou statistikou spočívá v tom, že stochastika usuzuje z vytvořeného pravděpodobnostního modelu zkoumaného děje na jeho průběh a aby u matematické statistiky byl průběh opačný, aby vlastnosti tohoto modelu byly odhadovány na základě zjištěných dat z jeho realizace.

Ukažme si na příklady z výuky:

Úloha 1: Hrají dva hráči. Házíte dvěma stejnými mincemi. Váš úkol je zvolit si předem na stálo jednu z možností, které padnou a za tuto příznivou možnost dostanete bod. Obdobně učiní protihráč. Kdo získá více bodů vyhraje. Kterou z možností je výhodné typovat?

Jsou možné tři výsledky hodu dvěma stejnými mincemi:

h_1 : padnou dva ruby,

h_2 : padnou dva líce,

h_3 : padne rub a líc.

Prostorem výsledků této hry je množina $\mathbf{M} = \{h_1, h_2, h_3\}$, každá úsečka reprezentuje jeden z výsledků (Obrázok 1).

Obrázok 1 Pravděpodobnost jevu h_1 je tedy $\frac{1}{4}$, jevu h_2 je také $\frac{1}{4}$ a jevu h_3 $\frac{1}{2}$.

Úloha 2: Hrají dva hráči. V neprůhledném losovacím zařízení mají dvě koule modré a dvě koule červené. Hráči si zvolí předem, na stálo, možnost buď vytáhnout koule stejné barvy anebo dvě koule různé barvy. Koule se do osudí vracejí. Hráči za svojí volbu dostanou bod. Je tato hra spravedlivá? Prostor výsledků této hry lze znázornit (Obrázok 2). Koule stejné barvy znázorňuje zelená úsečka, koule různé barvy černá úsečka.

Obrázok 2

Pravděpodobnost jevu s koule stejné barvy jsou $2/6$, což je $1/3$ a pravděpodobnost jevu r koule různé barvy $4/6$, což jsou $2/3$. Hra je nespravedlivá a ten kdo si zvolí koule různé barvy vždy vítězí.

Studentům jsem zadal problémovou úlohu: Kolik musím mít koulí červené barvy a kolik modré barvy, aby hra byla spravedlivá? Studenti tápali, ale přece jenom našli řešení, že koule modré barvy musí být jen jedna a koule červené barvy tři nebo obráceně.

Obrázok 3 Grafický důkaz

Pravděpodobnost jevu s koule stejné barvy jsou $3/6$, což je $1/2$ a pravděpodobnost jevu r koule různé barvy $3/6$, což je také $1/2$. Hra je spravedlivá.

Úloha 3: Matka má genotyp **Aa**. Stejný genotyp má i otec. Jaký genotyp může mít jejich potomek Dítě přebírá jedno písmeno z genotypu matky a jedno písmeno z genotypu otce. Pro každý z genotypů potomka najdi pravděpodobnost možnosti vzniku. Genotypy **Aa** a **aA** jsou totožné. (Poznámka: V genetice velké písmeno značí gen dominující a malé písmeno gen recesivní (ustupující)).

Opět si utvořme probabilistický model spojení dvou zárodečných buněk (heterozygot) (Obrázek 4):

Obrázek 4

V analogii mezi obrázkem 1 a obrázkem 4 je vidět, že spojení dvou heterozygot je možné simulovat hodem dvou stejných mincí.

Odpověď na naši úlohu je, že pravděpodobnost vzniku potomka s genotypem **AA** je $\frac{1}{4}$, s genotypem **aa** též $\frac{1}{4}$ a s genotypem **Aa** je $\frac{1}{2}$.

Podívejme se na výskyt genotypů v další generaci a spočítejme jejich pravděpodobnost:

	AA 0,25	aa 0,25	Aa 0,5
AA 0,25	AA1	Aa.....1	AA.....0,5 Aa.....0,5
aa 0,25	Aa.....1	aa.....1	aa.....0,5 Aa..... 0,5
Aa 0,5	Aa.....0,5 AA.....0,5	aa.....0,5 Aa.....0,5	aa.....0,25 Aa.....0,50 AA.....0,25

Spočítáme pravděpodobnost výskytu v nové generaci, kterou označíme f jako frekvence. Jde o nezávislé jevy.

$f(\text{AA})$:

$$f(\text{AA}) \cdot f(\text{AA}) \cdot 1 = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0,0625$$

$$f(\text{AA}) \cdot f(\text{Aa}) \cdot 0,5 = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(\text{Aa}) \cdot f(\text{AA}) \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(\text{Aa}) \cdot f(\text{Aa}) \cdot 0,25 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625$$

$$f(\text{AA}) = 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 = 0,25$$

$f(aa)$:

$$f(aa) \cdot f(aa) \cdot 1 = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0,625$$

$$f(aa) \cdot f(Aa) \cdot 0,5 = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(Aa) \cdot f(aa) \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(Aa) \cdot f(Aa) \cdot 0,25 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,0625$$

$$f(AA) = 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 = \mathbf{0,25}$$

$f(Aa)$:

$$f(AA) \cdot f(aa) \cdot 1 = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0,0625$$

$$f(AA) \cdot f(Aa) \cdot 0,5 = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(aa) \cdot f(AA) \cdot 1 = 0,25 \cdot 0,25 \cdot 1 = 0,0625$$

$$f(aa) \cdot f(Aa) \cdot 0,5 = 0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(Aa) \cdot f(AA) \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(Aa) \cdot f(aa) \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,0625$$

$$f(Aa) \cdot f(Aa) \cdot 0,5 = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,1250$$

$$f(Aa) = 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 + 0,0625 + 0,125 = \mathbf{0,5}$$

Presvědčili jsme se, že pravděpodobnost výskytu v nové generaci je shodná s výskytem v generaci původní.

Výsledek studenti ověřovali experimentálně. V jednom neprůhledném sáčku byl kruh z umělé hmoty na obou stranách černý – genotyp **AA**, identický kruh na obou stranách bílý – genotyp **aa** a dva identické kruhy z jedné strany bílé a z druhé strany černé – genotyp **Aa** (populace matek) a v druhém sáčku stejné kruhy (populace otců). Studenti vytáhli jeden kruh z jednoho sáčku a druhý kruh z druhého sáčku a nehlédíc na ně, rychle je položili na stůl. Viditelné barvy kruhu charakterizují gen potomka. Výsledky pokusů zapisovali.

Studentům jsem se zmínil i o známém pokusu křížení hrachu moravským botanikem J.G. Mendelem (1822-1884), kdy gen **A** je nositelem červené barvy květu a gen **a** bílé barvy květu.

Rostliny o genotypu **Aa** mají květy růžové. V určitém roce měl na pokusném pozemku všechny květy růžové (viz úloha 3 – genotyp matky **Aa**, genotyp otce **Aa**). V následujícím roce byly na pokusném pozemku květy růžové, červené a bílé. Květů červených bylo právě tolik jako bílých a květů růžových bylo dvakrát více než červených (bílých).

Dále pokračovala výuka určováním frekvence genotypů a fenotypů krevních skupin v populaci a i ukázka jedné z metod při vylučování otcovství v soudních sporech.

Tabulka 1 Genotypy a fenotypy v populaci

Genotyp	Fenotyp	Frekvence genotypu	Frekvence fenotypu
AA	A	0,08	0,41
A0		0,33	
BB	B	0,02	0,18
B0		0,16	
AB	AB	0,08	0,08
00	0	0,33	0,33

Před narozením dítěte lze s určitou pravděpodobností určit jakou bude mít dítě krevní skupinu na základě krevní skupiny otce a matky.

Lidově řečeno: „Dítě přebírá jedno písmeno z genotypu matky a jedno písmeno z genotypu otce“. Matematicky řečeno: Má-li matka krevní genotypovou skupinu xx a otec krevní genotypovou skupinu xy , pak dítě může mít genotypovou krevní skupinu xx s pravděpodobností 0,5. Pro frekvenci genotypů platí, že $f_{xx} + f_{xy} = 1$.

Sestavíme tabulku genotypů a fenotypů otce, matky a dítěte.

Tabulka 2 Tabulka genotypů a fenotypů otce, matky a dítěte

matka		A		B		AB 0,08	00 0,33
		AA 0,08	A0 0,33	BB 0,02	B0 0,16		
otec							
A	AA 0,08	AA.....1	AA.....0,5 A0.....0,5	AB.....1	AB.....0,5 A0.....0,5	AA....0,5 AB....0,5	A0.....1
	A0 0,33	AA.....0,5 A0----0,5	AA.....0,25 A0.....0,5 00..... 0,25	AB.....0,5 B0.....0,5	AB.....0,25 A0.....0,25 B0.....0,25 00.....0,25	AA....0,25 AB....0,25 A0....0,25 B0....0,25	A0....0,5 00....0,5
B	BB 0,02	AB.....1	AB.....0,5 B0.....0,5	BB.....1	BB.....0,5 B0.....0,5	AB....0,5 BB....0,5	B0.....1
	B0 0,16	AB.....0,5 A0.....0,5	AB.....0,25 A0.....0,25 B0.....0,25 00.....0,25	BB.....0,5 B0.....0,5	BB.....0,25 B0.....0,5 00.....0,25	AB....0,25 A0....0,25 BB....0,25 B0....0,25	B0....0,5 00....0,5
AB 0,08		AA....0,5 AB....0,5	AA.....0,25 A0.....0,25 B0.....0,25 AB.....0,25	AB.....0,5 BB.....0,5	AB.....0,25 A0.....0,25 BB.....0,25 B0.....0,25	AA....0,25 AB....0,5 BB.....0,25	A0....0,5 B0....0,5
00 0,33		A0.....1	A0.....0,5 00..... 0,5	B0.....1	B0.....0,5 00.....0,5	A0.....0,5 B0.....0,5	00....1

Z tabulky vidíme například: Má-li otec genotypovou krevní skupinu **AA** a matka genotypovou krevní skupinu **A0** nemůže mít dítě krevní genotypovou skupinu **BB**, **B0**, **AB** a **00**. Pravděpodobnost výskytu těchto skupin je nulová. Má-li otec fenotypovou krevní skupinu **A** a matka také **A**, nemůže mít dítě fenotypovou krevní skupinu **B** nebo **AB**.

Spočítáme-li pravděpodobnost frekvence genotypů v nové generaci dojdeme ke stejné frekvenci jako měla původní populace.

Například: Frekvence genotypu **AA** v populaci je 0,08. Tedy $F(\text{AA}) = 0,08$. Spočítáme frekvenci genotypu **AA** v nové generaci. Jde o nezávislé jevy.

Výpočet:

$$f(\text{AA}) \cdot f(\text{AA}) \cdot 1 = 0,08 \cdot 0,08 \cdot 1 = 0,0064$$

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{AA}) \cdot f(\mathbf{A0}) \cdot 0,5 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0132 \\
f(\mathbf{AA}) \cdot f(\mathbf{AB}) \cdot 0,5 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0032 \\
f(\mathbf{A0}) \cdot f(\mathbf{AA}) \cdot 0,5 &= 0,33 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0132 \\
f(\mathbf{A0}) \cdot f(\mathbf{A0}) \cdot 0,25 &= 0,33 \cdot 0,33 \cdot 0,25 = 0,027225 \\
f(\mathbf{A0}) \cdot f(\mathbf{AB}) \cdot 0,25 &= 0,33 \cdot 0,08 \cdot 0,25 = 0,0066 \\
f(\mathbf{AB}) \cdot f(\mathbf{AA}) \cdot 0,5 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,5 = 0,0032 \\
f(\mathbf{AB}) \cdot f(\mathbf{A0}) \cdot 0,25 &= 0,08 \cdot 0,33 \cdot 0,25 = 0,0066 \\
f(\mathbf{AB}) \cdot f(\mathbf{AB}) \cdot 0,25 &= 0,08 \cdot 0,08 \cdot 0,25 = 0,0016
\end{aligned}$$

Sečteme frekvence genotypů v nové generaci:

$$\begin{aligned}
&0,0064 + 0,0132 + 0,0032 + 0,0132 + 0,027224 + 0,0066 + 0,0032 + 0,0066 \\
&+ 0,0016 = \\
&= 0,081225 = \mathbf{0,08} \text{ (zaokrouhleno)}
\end{aligned}$$

V nové generaci je frekvence genotypu **AA** rovna 0,08, je stejná jako frekvence genotypu **AA** v původní populaci.

Výuka probíhala v rámci řešení projektu CZ.1.07/2.3.00/45.0034 „Partnerstvím ke zkvalitnění přípravy lidských zdrojů pro přírodovědné a technické vzdělávání“ spolufinancovaného Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky v souladu s publikací Metodika badatelsky orientované výuky, která byla jedním z výstupů projektu. Mají-li učitelé 1. stupně základní školy k badatelské výuce, musí se v prvé řadě seznámit s badatelskou výukou sami.

Bibliographic references:

- PŁOCKI, A. 2001. Pravděpodobnost kolem nás, Ústí nad Labem: UJEP. ISBN 80-704-55-3.
- SKODA, J. – DOULIK, P. 2015. 1. Využití některých psychodidaktických poznatků při učení a vyučování. In Metodika badatelsky orientované výuky. Ústí nad Labem, UJEP.
- MELICHAR, J. 2015. 6. Badatelsky orientovaná výuka v matematice. In Metodika badatelsky orientované výuky, Ústí nad Labem, UJEP.

prof. RNDr. Jan Melichar, CSc.,
 Faculty of Education
 University of J. E. Purkyně in Ústí nad Labem
 Hoření 13, 400 96 Ústí nad Labem
 Czech Republic
 jan.melichar@ujep.cz